Über die Kettenbrüche von Wallis *

Leonhard Euler

Definition

§1 Nachdem Brouncker seinen bemerkenswerten Kettenbruch für die Quadratur des Kreises gefunden hatte und ihn ohne Beweis Wallis mitgeteilt hatte, hat dieser sehr viel an Eifer darin investiert, dass er die Quelle, aus welcher Brouncker diese außerordentliche Formel geschöpft hatte, entdeckt. Er meinte aber, dass er jene außergewöhnlichen Formeln benutzt hatte, welche er selbst in seinem Werk „*Arithmetica infinitorum*“ gefunden hatte. Ja, er fand sogar durch nicht wenige sonderbare Rechnungen nicht nur den Kettenbruch von Brouncker, sondern darüber hinaus auch unzählige andere ähnliche Kettenbrüche, die natürlich genauso wie der Ausdruck von Brouncker für würdig zu halten sind, dass sie aus der Vergessenheit hervorgeholt werden.

§2 Was sich aber aus der *Arithmetica infinitorum* von Wallis, die schon lange vor der Entdeckung der *Analysis des Unendlichen* entstanden ist, hierauf erstreckt, kann nun auf gewohnte Weise durch Integralformeln, nachdem sie von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt worden sind, die folgenden Quadraturen beschafft werden:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = 1 = 1$$

*Originaltitel: „De fractionibus continuis Wallisii“, erstmals publiziert in „*Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg* 5 1815, pp. 24-44 “, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16, pp. 178 - 199“, Eneström-Nummer E745, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

$$\int \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2}{3} = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}$$
$$\int \frac{x^5 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$\int \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$
$$\int \frac{x^9 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}$$
etc

§3 Diese Formeln in der dritten Spalte habe ich so dargestellt, dass die Nenner natürlich eine Interpolation zulassen; und so bleibt es natürlich nur übrig, dass auch die Nenner so umgeformt werden, dass sie genauso eine Interpolation zulassen, was passieren wird, wenn eine solche Reihe, die nach einem gleichmäßigen Gesetz fortschreitet, natürlich A, B, C, D, E, F, etc, gefunden wird, sodass

$$AB = 1\cdot 1, \quad BC = 2\cdot 2, \quad CD = 3\cdot 3, \quad DE = 4\cdot 4, \quad \text{etc}$$

ist, was genau dem entspricht, in welchem Wallis den höchsten Scharfsinn des Geistes zeigte, welche Untersuchung ich aber im Folgenden um vieles allgemeiner und mit weit leichterer Rechnung erörtern werde.

§4 Nachdem aber diese Reihe der Buchstaben A, B, C, D, etc gefunden worden ist, wird die ganze Aufgabe vollkommen erledigt sein. Weil es nämlich so ist, wie es die folgenden Tabelle zeigt

$$\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = 1 = \frac{1}{A}\cdot\frac{A}{1}$$
$$\int \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{B\cdot C}{2\cdot 3} = \frac{1}{A}\cdot\frac{A\cdot B\cdot C}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$\int \frac{x^5 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{B\cdot C\cdot D\cdot E}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{A}\cdot\frac{A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$\int \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{B\cdot C\cdot D\cdot E\cdot F\cdot G}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{A}\cdot\frac{A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E\cdot F\cdot G}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$
etc,

liefert uns die Interpolation die folgenden Quadraturen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot 1$$
$$\int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{A \cdot B}{1 \cdot 2}$$
$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{A \cdot B \cdot C \cdot D}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$\int \frac{x^6\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot F}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

etc.

§5 Weil nun

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2}$$

ist, während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser gleich 1 ist, an dessen Stelle wir der Kürze wegen $q = \frac{\pi}{2}$ schreiben wollen, werden alle Werte der Buchstaben A, B, C, D, etc durch diese Größe q auf die folgende Weise ausgedrückt werden:

	Differenzen
$A = \frac{1}{q} = 0,636620$	
	$0,934176$
$B = q = 1,570796$	
	$0,975683$
$C = \frac{4}{q} = 2,546479$	
	$0,987813$
$D = \frac{9q}{4} = 3,534292$	
	$0,992782$
$E = \frac{4 \cdot 16}{9 \cdot q} = 4,527074$	
	$0,995257$
$F = \frac{9 \cdot 25}{4 \cdot 16} q = 5,522331$	
etc	

§6 Hier habe ich die dritte Spalte angefügt, welche die numerischen Werte dieser Buchstaben beschafft, damit es klarer wird, wie diese Zahlen nach einem gleichmäßigen Gesetz wachsen, was nicht passiert wäre, wenn ich anstelle von q einen falschen Wert angenommen hätte. Nachdem diese Dinge erörtet worden sind, möchte ich eine um vieles leichtere Methode angeben, mit welcher für diese einzelnen Buchstaben Kettenbrüche gefunden werden können, und werde in derselben Arbeit eine um vieles allgemeinere Untersuchung anstellen, während ich das folgende Problem lösen werde.

PROBLEM

Es ist eine Reihe der Buchstaben A ,B, C, D, etc, die nach einem gleichmäßigen Gesetz fortschreite, vorgegeben, sodass

$$AB = ff, \quad BC = (f+a)^2, \quad CD = (f+2a)^2, \quad \text{etc}$$

ist.

LÖSUNG

§7 Hier ist sofort klar, wie A eine Funktion von f war, dass so B eine Funktion von $f+a$ sein muss, dann aber C eine von $f+2a$, D eine von $f+3a$ und so weiter. Wenn, nachdem dieses Gesetz bemerkt worden ist, wir

$$A = f - \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{A'}$$

setzen, wird

$$B = f + \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{B'}$$

gesetzt werden müssen, wo die Buchstaben A' und B' dasselbe Verhähltnis zueinander haben müssen, sodass B' aus A' entsteht, wenn $f+a$ anstelle von f geschrieben wird. Weil also nach Wegschaffen dieser Brüche

$$2A = 2f - a + \frac{s}{A'} \quad \text{und} \quad 2B = 2f + a + \frac{s}{B'}$$

ist, ist das Produkt dieser Formeln gleich $4ff$ zu setzen, woher diese von Brüchen befreite Gleichung entsteht:

$$aaA'B' - A's(2f-a) - B's(2f+a) - ss = 0.$$

Wir wollen also $s = aa$ setzen, dass diese Gleichung durch aa geteilt

$$A'B' - A'(2f-a) - B'(2f+a) = aa$$

ist, welche angenehm durch Faktoren so dargestellt können wird:

$$(A' - 2f - a)(B' - 2f + a) = 4ff.$$

§8 Weil nur, wenn die beiden Buchstaben A' und B' gleich wären, aus der linken Seite $A' = B' = 4ff$ wäre, wollen wir nach dem oben erwähnten Gesetz die Folgenden festsetzen:

$$A' = 4f - 2a + \frac{s'}{A''}$$

und

$$B' = 4f + 2a + \frac{s'}{B''},$$

nach Einsetzen von welchen die letzte Gleichung diese Form annehmen wird:

$$\left(2f - 3a + \frac{s'}{A''}\right)\left(2f + 3a + \frac{s'}{B''}\right) = 4ff.$$

Nach der Entwicklung und Wegschaffen der Brüche wird die folgende Gleichung entstehen:

$$9aaA''B'' - A''s'(2f-3a) - B''s'(2f+3a) - s's' = 0$$

Man nehme also hier $s' = 9aa$, sodass man diese Gleichung hat

$$A''B'' - A''(2f-3a) - B''(2f+3a) = 9aa,$$

welche wiederum durch Faktoren auf diese Weise dargestellt werden kann:

$$(A'' - 2f - 3a)(B'' - 2f + 3a) = 4ff.$$

§9 Weil nun wiederum $4f$ der Mittelwert zwischen A'' und B'' ist, wollen wir weiter

$$A'' = 2f - 2a + \frac{s''}{A'''} \quad \text{und} \quad B'' = 4f + 2a + \frac{s''}{B'''}$$

setzen, und nach der Substitution wird diese Gleichung entstehen:

$$\left(2f-5a+\frac{s''}{A'''}\right)\left(2f+5a+\frac{s''}{B'''}\right)=4ff.$$

Nach Entwicklung und Wegschaffen der Brüche wird

$$25aaA'''B'''-A'''s''(2f-5a)-B'''s''(2f+5a)-s''s''=0$$

sein. Man setze $s''=25aa$, und diese Gleichung wird diese Form annehmen:

$$A'''B'''-A'''(2f-5a)-B'''(2f+5a)=25aa,$$

welche durch Faktoren auf diese Weise dargestellt werden kann:

$$(A'''-2f-5a)(B'''-2f+5a)=4ff.$$

§10 Man setze also erneut, wie zuvor,

$$A'''=4f-2a+\frac{s'''}{A^{\text{iv}}} \quad \text{und} \quad B'''=4f+2a+\frac{s'''}{B^{\text{iv}}},$$

und es wird nach der Substitution

$$\left(2f-7a+\frac{s'''}{A^{\text{iv}}}\right)\left(2f+7a+\frac{s'''}{B^{\text{iv}}}\right)=4ff$$

werden, wie nach Entwickeln und Ordnen welcher Gleichung man

$$A^{\text{iv}}B^{\text{iv}}-A^{\text{iv}}(2f-7a)-B^{\text{iv}}(2f+7a)=49aa$$

erhält, wo wir natürlich $s'''=49aa$ gesetzt haben; dann wird aber durch Faktoren

$$(A^{\text{iv}}-2f-7a)(B^{\text{iv}}-2f+7a)=4ff$$

sein. Daher ist klar, wie diese Operationen weiter fortzusetzen sind.

§11 Durch Sammeln von dieser werden wir also wegen

$$s=aa, \quad s'=9aa, \quad s''=25aa, \quad s'''=49aa, \quad \text{etc}$$

für $2A$ den folgenden Kettenbruch erhalten:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa}{4f - 2a + \cfrac{9aa}{4f - 2a + \cfrac{25aa}{4f - 2a + \cfrac{49aa}{4f - 2a + etc}}}}$$

wo, wenn wir anstelle von f der Reihe nach $f + a$, $f + 2a$, $f + 3a$, etc schreiben, ähnliche Kettenbrüche für $2B$, $2C$, $2D$, etc hervorgehen werden; diese werden sich so verhalten:

$$2B = 2f + a + \cfrac{aa}{4f + 2a + \cfrac{9aa}{4f + 2a + \cfrac{25aa}{4f + 2a + \cfrac{49aa}{4f + 2a + etc}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \cfrac{aa}{4f + 6a + \cfrac{9aa}{4f + 6a + \cfrac{25aa}{4f + 6a + \cfrac{49aa}{4f + 6a + etc}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \cfrac{aa}{4f + 10a + \cfrac{9aa}{4f + 10a + \cfrac{25aa}{4f + 10a + \cfrac{49aa}{4f + 10a + etc}}}}$$

etc...

§12 Wenn wir daher nun hier $f = 1$ und $a = 1$ setzen, wird der von Wallis behandelte Fall selbst hervorgehen, woher die von Wallis gefundenen Kettenbrüche mit seinen durch die Quadratur des Kreises ausgedrückten Werten die folgenden sein werden:

$$2A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc}}}}} = \frac{2}{q} = \frac{4}{\pi},$$

$$2B = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{9}{6 + \cfrac{25}{6 + \cfrac{49}{6 + \text{etc}}}}} = 2q = \pi,$$

$$2C = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{9}{10 + \cfrac{25}{10 + \cfrac{49}{10 + \text{etc}}}}} = \frac{8}{q} = \frac{16}{\pi},$$

$$2D = 7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{9}{14 + \cfrac{25}{14 + \cfrac{49}{14 + \text{etc}}}}} = \frac{9q}{2} = \frac{9\pi}{4},$$

$$2E = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{9}{18 + \cfrac{25}{18 + \cfrac{49}{18 + \text{etc}}}}} = \frac{128}{9q} = \frac{256}{9\pi},$$

deren erster der von Brouncker gefundene Kettenbruch selbst ist.

§13 Aber es ist in der Tat keinesfalls wahrscheinlich, dass Brouncker durch so große Umwege zu seiner Formel gelangt ist; ich für meine Person glaube, dass er sie eher aus der Betrachtung dieser allbekannten Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc} = \frac{\pi}{4},$$

welche für gewöhnlich Leibniz zugeschrieben wird, aber um vieles früher schon von Jacob Gregory gefunden worden war, von welchem Brouncker diese gekannt haben konnte, berechnet hat, was ja durch hinreichend leichte und offensichtliche Operationen auf die folgende Weise gemacht werden kann:

Für ... gesetzt	wird ... sein
$\frac{\pi}{4} = 1 - \alpha$	$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} = 1 + \frac{1}{-1+\frac{1}{\alpha}}$
$\alpha = \frac{1}{3} - \beta$	$\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{1-3\beta} = 3 + \frac{9\beta}{1-3\beta} = 3 + \frac{9}{-3+\frac{1}{\beta}}$
$\beta = \frac{1}{5} - \gamma$	$\frac{1}{\beta} = \frac{5}{1-5\gamma} = 5 + \frac{25\gamma}{1-5\gamma} = 5 + \frac{25}{-5+\frac{1}{\gamma}}$
$\gamma = \frac{1}{7} - \delta$	$\frac{1}{\gamma} = \frac{7}{1-7\delta} = 7 + \frac{49\delta}{1-7\delta} = 7 + \frac{49}{-7+\frac{1}{\delta}}$
etc.	etc.

Wenn daher nun hier anstelle von $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, etc die gerade gefundenen Werte eingesetzt werden, ergibt sich schlußendlich der Kettenbruch von Brouncker selbst, weil ja daher folgt, dass

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc}}}}}$$

sein wird.

§14 Was aber unsere allgemeine Lösung des Problems angeht, lassen sich die Werte der einzelnen Kettenbrüche sogar durch bestimmte Quadraturen ausdrücken, welche wir im folgenden Problem zeigen.

Problem

Nachdem die Reihe A ,B, C, D, etc. die nach einem gleichmäßigen Gesetz fortschreitet, vorgelegt worden ist, sodass

$$AB = ff, \quad BC = (f+a)^2, \quad CD = (f+2a)^2, \quad \text{etc}$$

ist, sind die Werte dieser Buchstaben natürlich zuerst durch unendliche Produkte, dann aber durch Integralformeln ausgedrückt zu finden.

Lösung

§15 Weil also

$$A = \frac{ff}{B}, \quad B = \frac{(f+a)^2}{C}, \quad C = \frac{(f+2a)^2}{D}, \quad \text{etc}$$

ist, wird man nach wiederholtem Einsetzen dieser Werte

$$A\frac{ff(f+2a)^2(f+4a)^2(f+6a)^2 \text{ etc}}{(f+a)^2(f+3a)^2(f+5a)^2 \text{ etc}}$$

bis ins Unendlich finden. Weil aber auf diese Weise kein bestimmter Wert entsteht, weil ja, wo auch immer man abbricht, entweder in den Nennern oder in den Zählern ein Faktor zu viel ist, wird diese Unannehmlichkeit weggeschafft werden, wenn wir die einfachen Faktoren auf die folgende Weise aufteilen:

$$A = f \cdot \frac{f(f+2a)}{(f+a)(f+a)} \cdot \frac{(f+2a)(f+4a)}{(f+3a)(f+3a)} \cdot \frac{(f+4a)(f+6a)}{(f+5a)(f+5a)} \cdot \text{ etc;}$$

so werden nämlich die Glieder immer näher an die Einheit herangehen und werden hin zum Unendlichen der Einheit gleich werden, und so wird dieser Ausdruck natürlich einen bestimmten Wert haben.

§16 Um aber zu zeigen, wie sein Wert auf Integralformeln zurückgeführt wird, wollen wir dieses Lemma zu Hilfe nehmen. Nachdem diese Integrale von $x=0$ bis $x=1$ erstreckt worden sind, wird

$$\int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \cdot \frac{m+k+3n}{m+3n} \cdot \frac{m+k+4n}{m+4n} \cdots \int \frac{x^{\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$$

sein. Um nun dieses Lemma auf unseren Fall anzuwenden, weil ja in unseren Gliedern die einzelnen Faktoren einen Zuwachs von $2a$ erfahren, muss $n = 2a$ gesetzt werden; dann werden wir aber für $m = f$ und $k = a$ genommen

$$\int \frac{x^{f-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{f+a}{f} \cdot \frac{f+3a}{f+2a} \cdot \frac{f+5a}{f+4a} \cdots \int \frac{x^{\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

haben, welcher Ausdruck invertiert die ersten Faktoren der einzelnen Glieder liefert. Für die zweiten wollen wir $m = f + a$ nehmen, während $k = a$ bleibt, und auf diese Weise wird

$$\int \frac{x^{f+a-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{f+2a}{f+a} \cdot \frac{f+4a}{f+3a} \cdot \frac{f+6a}{f+5a} \cdots \int \frac{x^{\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

sein.

§17 Es ist aber nun klar, dass die zweite Formel durch die erste geteilt unser unendliches Produkt selbst darbietet, auf welche Weise sich die infinitesimalen Integrale gegenseitig aufheben; als logische Konsequenz haben wir

$$A = \int \frac{x^{f+a-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Auf die gleiche Weise weiter

$$B = \int \frac{x^{f+2a-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+a-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

$$C = \int \frac{x^{f+3a-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+2a-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

etc.

Aber diese Untersuchung kann in der Tat noch allgemeiner gemacht werden, wie das folgende Problem lehren wird.

Allgemeineres Problem

Es ist eine Reihe, die nach einem gleichmäßigen Gesetz fortschreitet, A, B, C, D, etc zu finden, sodass

$$AB = ff + c,\ BC = (f+a)^2 + c,\ CD = (f+2a)^2 + c,\ DE = (f+3a)^2 + c, \text{ etc}$$

ist, wo in den einzelnen Produkten der Buchstabe f um die Größe a vermehrt werde.

§18 Hier ist wiederum ersichtlich, wie A eine Funktion von f war, dass so B eine Funktion von $f+a$ sein muss, C eine von $f+2a$, D eine von $f+3a$ und so weiter. Weil also $AB = ff + c$ ist, wäre, wenn A und B gleich wären, $A = B = f$ nach Weglassen von c. Um wie viel kleiner A als f angenommen wird, muss B größer sein; daher wird für $A = f - x$ gesetzt $B = f + x$ sein. Weil ja aber B aus A entsteht, wenn $f+a$ anstelle von f geschrieben wird, muss auch $B = f + a - x$ sein, woher wir folgern, dass $x = \frac{1}{2}a$ sein wird; und so werde die anfänglichen Teile für A und B

$$A = f - \frac{1}{2}a \qquad \text{und} \qquad B = f + \frac{1}{2}a$$

oder

$$2A = 2f - a \qquad \text{und} \qquad 2B = 2f + a$$

sein und daher für die folgenden

$$2C = 2f + 3a, \quad 2D = 2f + 5a, \quad 2E = 2f + 7a, \quad \text{etc.}$$

§19 Nachdem diese Anfangswerte gefunden worden sind, wollen wir setzen, dass in der Tat

$$2A = 2f - a + \frac{s}{A'}, \quad 2B = 2f + a + \frac{s}{B'}$$

ist. Aber für s wird bald ein geeigneter Wert entstehen. Daher wird also

$$4AB = 4ff - aa + \frac{s}{A'}(2f+a) + \frac{s}{B'}(2f-a) + \frac{ss}{A'B'} = 4ff + 4c$$

sein, welche Gleichung nach Wegschaffen der Brüche diese Form annehmen wird:

$$A'B'(aa+4c) - A's(2f-a) - B's(2f+a) - ss = 0.$$

Wir wollen nun $s = aa + 4c$ nehmen, und nach der Teilung wird

$$A'B' - A'(2f-a) - B'(2f+a) = aa + 4c$$

sein, welche Gleichung man so durch Faktoren darstellen kann:

$$(A' - 2f - a)(B' - 2f + a) = 4ff + 4c.$$

§20 Nun sieht man auf die gleiche Schlussweise wie zuvor ein, wenn A' und B' gleich waren, dass die linke Seite

$$A'A' - 4fA' = 0 \quad \text{und daher} \quad A' = B' = 4f$$

sein wird. Weil aber B' aus A' entstehen muss, wenn $f + a$ anstelle von f geschrieben wird, ist ersichtlich, dass die anfänglichen Teile

$$A' = 4f - 2a \quad \text{und} \quad B' = 4f + 2a$$

sein werden. In der Tat wollen wir also setzen, dass

$$A' = 4f - 2a + \frac{s'}{A''} \quad \text{und} \quad B' = 4f + 2a + \frac{s'}{B''}$$

ist, woher, wenn diese Werte eingesetzt werden, die vorhergehende Gleichung durch Faktoren ausgedrückt diese Form annehmen wird:

$$\left(2f - 3a + \frac{s'}{A''}\right)\left(2f + 3a + \frac{s'}{B''}\right) = 4ff + 4c,$$

welche nach Entwicklung auf diese Gleichung führt:

$$(4ff - 9aa) + \frac{s'}{A''}(2f + 3a) + \frac{s'}{B''}(2f - 3a) + \frac{s's'}{A''B''} = 4ff + 4c;$$

und diese geht nach Wegschaffen der Brüche in diese über:

$$A''B''(9aa + 4c) - A''s'(2f - 3a) - B''s'(2f + 3a) - s's' = 0.$$

Für $s' = 9aa + 4c$ genommen und nach der Teilung entsteht also diese Gleichung:

$$A''B'' - A''(2f - 3a) - B''(2f + 3a) = 9aa + 4c,$$

welche durch Faktoren auf diese Weise dargestellt werden kann:

$$(A'' - 2f - 3a)(B'' - 2f + 3a) = 4ff + 4c.$$

§21 Weil diese Gleichung der vorhergehenden ähnlich ist und wiederum $4f$ für den Fall $A'' = B''$ hervorginge, setze man weiter

$$A'' = 4f - 2a + \frac{s''}{A'''} \quad \text{und} \quad B'' = 4f + 2a + \frac{s''}{B'''},$$

woher die letzte Gleichung durch Faktoren

$$\left(2f-5a+\frac{s''}{A'''}\right)\left(2f+5a+\frac{s''}{B'''}\right)=4ff+4c$$

sein wird. Und nach der Entwicklung und Wegschaffen der Brüche geht

$$A'''B'''(25aa+4c)-A'''s''(2f-5a)-B'''s''(2f+5a)-s''s''=0$$

hervor. Indem man also $s''=25aa+4c$ nimmt und durch s'' teilt, wird

$$A'''B'''-A'''(2f-5a)-B'''(2f+5a)=25aa+4c$$

werden oder durch ein Produkt

$$(A'''-2f-5a)(B'''-2f+5a)=4ff+4c.$$

§22 Man setze weiter

$$A'''=4f-2a+\frac{s'''}{A^{\text{iv}}}\qquad\text{und}\qquad B'''=4f+2a+\frac{s'''}{B^{\text{iv}}}$$

und die oberere Gleichung wird durch ein Produkt nach Einsetzen dieser Werte

$$\left(2f-7a+\frac{s'''}{A^{\text{iv}}}\right)\left(2f+7a+\frac{s'''}{B^{\text{iv}}}\right)=4ff+4c$$

sein, welche nach Wiederholung derselben Operationen und für $s'''=49aa+4c$ auf die folgende zurückgeführt wird:

$$A^{\text{iv}}B^{\text{iv}}-A^{\text{iv}}(2f-7a)-B^{\text{iv}}(2f+7a)=49aa+4c,$$

oder es wird in Faktoren

$$(A^{\text{iv}}-2f-7a)(B^{\text{iv}}-2f+7a)=4ff+4c$$

sein. Daraus ist nun schon vollkommen klar, wie diese Rechnung weiter fortgesetzt werden muss.

§23 Nachdem also diese Werte nacheinander eingesetzt worden sind, werden wir wegen

$$s = aa + 4c, \quad s' = 9aa + 4c, \quad s'' = 25aa + 4c, \quad s''' = 49aa + 4c, \qquad \text{etc}$$

für A den folgenden Kettenbruch erhalten:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{9aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{25aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{49aa + 4c}{4f - 2a + \text{etc.}}}}}$$

Auf die gleiche Weise wird daher

$$2B = 2f + a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{49aa + 4c}{4f + 2a + \ \text{etc},}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{49aa + 4c}{4f + 6a + \ \text{etc},}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{49aa + 4c}{4f + 10a + \ \text{etc}}}}}$$

$$\text{etc}$$

sein.

§24 Weil

$$AB = ff + c,\ BC = (f+a)^2 + c,\ CD = (f+2a)^2 + c,\ DE = (f+3a)^2 + c, \text{etc}$$

ist, wird

$$A = \frac{(ff+c)((f+2a)^2+c)((f+4a)^2+c)((f+6a)^2+c)\text{etc}}{((f+a)^2+c)((f+3a)^2+c)((f+5a)^2+c)\text{etc}}$$

sein. Aber in diesem Ausdruck, wo auch immer man ihn abbricht, wird entweder in den Zählern oder in den Nennern ein Faktor zu viel sein. Damit das klarer wird, wollen wir zuerst in den Buchstaben F einsetzen, und es wird

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot ((f+4a)^2+c) \cdot \frac{1}{F}$$

sein. Wann immer wir aber in den folgenden Buchstaben G einsetzen, wird

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot \frac{(f+4a)^2+c}{(f+5a)^2+c} \cdot G$$

werden.

§25 Wenn daher also diese beiden Ausdrücke ins Unendliche fortgesetzt werden und miteinander multipliziert werden, wird der letzte Faktor aus Buchstaben, der hier $\frac{G}{F}$ ist, natürlich der Einheit gleich werden. Weil aber in diesem Fall die Anzahl der Faktoren im Zähler um eine Einheit zu groß ist, wollen wir seinen ersten Faktor einzeln am Anfang schreiben, und das Produkt wird auf die folgende Weise ausgedrückt werden:

$$A^2 = (ff+c) \cdot \frac{(ff+c)((f+2a)^2+c)}{((f+a)^2+c)((f+a)^2+c)} \cdot \frac{((f+2a)^2+c)((f+4a)^2+c)}{((f+3a)^2+c)((f+3a)^2+c)} \cdot \text{etc},$$

wo natürlich die infinitesimalen Faktoren schon der Einheit gleich wurden und so der ganze Ausdruck nach einem gleichmäßigen Gesetz fortschreitet. Hier müssen aber zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem ob c eine positive oder negative Zahl war.

Fall 1, in dem $c = -bb$ ist

§26 Im ersten Fall wird sich ein beliebiger Faktor in zwei auflösen lassen. Wir wollen also zuerst $c = -bb$ setzen, in welchem Fall der Kettenbruch auf die folgende Weise beschafft werden kann:

$$2A = 2f - a + \cfrac{(a+2b)(a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(3a+2b)(3a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(5a+2b)(5a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(7a+2b)(7a-2b)}{4f - 2a + \text{ etc,}}}}}$$

und anstelle der Ausdrucks durch Faktoren werden wir nun den folgenden für den einfachen Buchstaben A haben, natürlich

$$A = (f-b) \cdot \frac{(f+b)(f+2a-b)}{(f+a+b)(f+a-b)} \cdot \frac{(f+2a+b)(f+4a-b)}{(f+3a+b)(f+3a-b)} \cdot \text{ etc,}$$

in einem beliebigen Glied welches Ausdrucks die Summe der Faktoren des Nenners der Summe der Faktoren des Nenners gleich wird; wegen dieser Eigenschaft werden diese Faktoren durch eine Integralformel ausgedrückt werden können.

§27 Es ist aber bekannt, wenn diese Integralformel

$$\int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$$

von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt wird, dass der Wert auf das folgende unendliche Produkt zurückgeführt wird

$$\frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \cdots \int \frac{x^{\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}.$$

Um also diese Form auf unseren Ausdruck anzuwenden, weil die einzelnen Faktoren im folgenden Glied um die Größe $2a$ vermehrt werden, muss $n = 2a$ genommen werden; dann wird man aber für $m = f + b$ und $k = a$ gesetzt finden, dass

$$\frac{f+a+b}{f+b} \cdot \frac{f+3a+b}{f+2a+b} \cdot \frac{f+5a+b}{f+4a+b} \cdots \int \frac{x^{\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \int \frac{x^{f+b-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

sein wird, welcher Ausdruck invertiert die ersten Faktoren jedes Gliedes enthält. Für die weiteren nehme man, während aber $n = 2a$ bleibt, $m = f + a - b$ und $k = a$, auf welche Weise diese Gleichung entstehen wird:

$$\frac{f+2a-b}{f+a-b} \cdot \frac{f+4a-b}{f+3a-b} \cdot \frac{f+6a-b}{f+5a-b} \cdots \int \frac{x^{\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \int \frac{x^{f+a-b-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Wenn also diese Gleichung durch die vorhergehende geteilt wird, werden sich die letzten Integralfaktoren gegenseitig aufheben und es wird ein unendliches Produkt, das gegen den Wert A konvergiert, durch zwei Integralformeln ausgedrückt hervorgehen, sodass

$$A = (f-b) \int \frac{x^{f+a-b-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+b-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

ist.

§28 Um das an einem Beispiel aufzuzeigen, wollen wir $f = 2$, $a = 1$, $b = 1$ nehmen, dass wir diese Werte haben $AB = 3$, $BC = 8$, $CD = 15$, $DE = 24$, etc und in diesem Fall wird unser Kettenbruch

$$2A = 3 - \cfrac{3}{6 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{21}{6 + \cfrac{45}{6 + \cfrac{77}{6 + \text{ etc}}}}}}$$

sein. Aber durch ein unendliches Produkt wird

$$A = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \text{etc}$$

sein. Dann wird man aber durch Integralformeln

$$A = \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} : \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}}$$

haben. Es ist aber bekannt, dass für unsere Integrationsgrenzen, von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$,

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = 1 \text{ und } \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{4}$$

ist, woher man $A = \frac{4}{\pi}$ berechnet, was mit dem Wallis'schen Produkt selbst, in dem

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \text{etc}$$

ist, überaus übereinstimmt.

FALL 2, IN DEM $c = +bb$ IST

§29 Wir wollen nun den anderen Fall $c = +bb$ entwickeln, für welchen der Kettenbruch diese Form annimmt:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{9aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{25aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{49aa + 4bb}{4f - 2a + \text{ etc.}}}}}$$

Aber das unendliche Produkt ergibt sich aus der vorhegehenden Form, indem man $b\sqrt{-1}$ anstelle von b schreibt; mit imaginären Einheiten ausgedrückt ergibt sich:

$$\begin{aligned} A =& (f - b\sqrt{-1}) \cdot \frac{(f + b\sqrt{-1})(f + 2a - b\sqrt{-1})}{(f + a + b\sqrt{-1})(f + a - b\sqrt{-1})} \cdot \\ & \frac{(f + 2a + b\sqrt{-1})(f + 4a - b\sqrt{-1})}{(f + 3a + b\sqrt{-1})(f + 3a - b\sqrt{-1})} \cdot \text{etc.} \end{aligned}$$

Es ist aber ersichtlich, dass in demselben in §26 erwähnten Ausdruck anstelle von b auch $-b\sqrt{-1}$ geschrieben werden konnte, woher

$$\begin{aligned} A =& (f + b\sqrt{-1}) \cdot \frac{(f - b\sqrt{-1})(f + 2a + b\sqrt{-1})}{(f + a - b\sqrt{-1})(f + a + b\sqrt{-1})} \cdot \\ & \frac{(f + 2a - b\sqrt{-1})(f + 4a + b\sqrt{-1})}{(f + 3a - b\sqrt{-1})(f + 3a + b\sqrt{-1})} \cdot \text{ etc} \end{aligned}$$

hervorgegangen wäre. Das Produkt dieser beiden Ausdrücke wird also reell; es wird nämlich

$$\begin{aligned} A^2 =& (ff + bb) \cdot \frac{(ff + bb)((f + 2a)^2 + bb)}{((f + a)^2 + bb)((f + a)^2 + bb)} \cdot \\ & \frac{((f + 2a)^2 + bb)((f + 4a)^2 + bb)}{((f + 3a)^2 + bb)((f + 3a)^2 + bb)} \cdot \text{etc} \end{aligned}$$

sein, welcher Ausdruck mit dem oben in §25 gefundenen übereinstimmt.

§30 Aber in der Tat wird auch der Ausdruck durch Integralformeln imaginär. Wenn nämlich in den Formeln in §27 $b\sqrt{-1}$ anstelle von b geschrieben wird, wird der folgende Ausdruck entstehen:

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f+a-1-b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f-1+b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Aber nach Verändern des Vorzeichens der imaginären Einheit wird

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f+a-1+b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f-1-b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

sein, wo kein Zweifel besteht, dass in jedem der beiden Ausdrücke sich die imaginären Anteile aufheben, auch wenn keine Methode bekannt ist, dieses gegenseitige Aufheben der imaginären Anteile tatsächlich zu entwickeln.

§31 Wenn aber diese beiden Ausdrücke miteinander multipliziert werden, dann wird dieses Aufheben nicht schwer gezeigt werden können. Weil nämlich das Produkt

$$A^2 = (ff + bb) \frac{\int \frac{x^{f+a-1-b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} \cdot \int \frac{x^{f+a-1+b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}}{\int \frac{x^{f-1+b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} \cdot \int \frac{x^{f-1-b\sqrt{-1}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}}$$

ist, kann gezeigt werden, dass sich im Zähler wie im Nenner die imaginären Einheiten jeweils aufheben, was freilich genügen wird, es für den Nenner gezeigt zu haben weil der Zähler daraus entsteht, indem man $f + a$ anstelle von f schreibt.

§32 Um den Beweis zu verkürzen, wollen wird der Kürze wegen

$$\frac{x^{f-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \mathrm{d}v$$

setzen, wodurch der Nenner unseres mit imaginären Anteilen versehenen Ausdrucks

$$\int x^{b\sqrt{-1}}\mathrm{d}v \cdot \int x^{-b\sqrt{-1}}\mathrm{d}v$$

sein wird. Man setze nun

$$\text{die Summe der Faktoren gleich} \quad \int (x^{b\sqrt{-1}} + x^{-b\sqrt{-1}})\mathrm{d}v = p$$

$$\text{die Differenz der Faktoren gleich} \quad \int (x^{b\sqrt{-1}} - x^{-b\sqrt{-1}})\mathrm{d}v = q$$

und es ist bekannt, dass das vorgelegte Produkt

$$\int x^{b\sqrt{-1}}\mathrm{d}v \cdot \int x^{-b\sqrt{-1}}\mathrm{d}v = \frac{pp-qq}{4}$$

sein wird. Ich werde also zeigen, dass so pp wie qq auf reelle Größen zurückgeführt werden können.

§33 Für dieses Ziel wollen wir anstelle von x in den imaginären Potenzen $\mathrm{e}^{\ln(x)}$ schreiben, sodass

$$p = \int (\mathrm{e}^{b\ln(x)\sqrt{-1}} + \mathrm{e}^{-b\ln(x)\sqrt{-1}})\mathrm{d}v$$

$$q = \int (\mathrm{e}^{b\ln(x)\sqrt{-1}} - \mathrm{e}^{-b\ln(x)\sqrt{-1}})\mathrm{d}v$$

wird. Weil wir also wissen, dass

$$\mathrm{e}^{\varphi\sqrt{-1}} + \mathrm{e}^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\cos(\varphi)$$

und

$$\mathrm{e}^{\varphi\sqrt{-1}} - \mathrm{e}^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin(\varphi)$$

ist, wird, nachdem der Kürze wegen $b\ln(x) = \varphi$ gesetzt wurde,

$$p = 2\int \cos(\varphi)\mathrm{d}v \text{ und } q = 2\sqrt{-1}\int \sin(\varphi)\mathrm{d}v$$

werden, woher von selbst der Nenner

$$\frac{pp-qq}{4} = \left(\int \cos(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2 + \left(\int \sin(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2$$

als ein Ausdruck entspringt, der natürlich reell ist.

§34 Daher wird leicht der Wert des Zählers berechnet, welcher natürlich

$$\left(\int x^a \cos(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2 + \left(\int x^a \sin(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2$$

sein wird, sodass unser Ausdruck, der mit imaginäre Anteilen versehen ist, für A^2 auf die folgende Weise reell dargestellt wird:

$$A^2 = (ff + bb)\frac{\left(\int x^a \cos(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2 + \left(\int x^a \sin(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2}{\left(\int \cos(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2 + \left(\int \sin(\varphi)\mathrm{d}v\right)^2},$$

während

$$\mathrm{d}v = \frac{x^{f-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} \quad \text{und} \quad \varphi = b\ln(x)$$

ist.

§35 In der Analysis wird aber noch eine Methode vermisst, durch Integration Formeln dieser Arten zu behandeln:

$$\int \frac{x^{f-1}\cos(b\ln(x))\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{f-1}\sin(b\ln(x))\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Dennoch könnte, wenn der Nenner fehlte, jede der beiden Formeln in der Tat integriert werden, was der Mühe wert sein wird, es auf die folgende Weise gezeigt zu haben.

§36 Dies wird nämlich mit Hilfe der allbekannten Reduktion

$$\int P\mathrm{d}Q = PQ - \int Q\mathrm{d}P$$

geleistet werden können. Wenn man natürlich für die erste Formel

$$P = \cos(b\ln(x)) \text{ und } \mathrm{d}Q = x^{f-1}\mathrm{d}x$$

nimmt, wird

$$\int x^{f-1}\cos(b\ln(x))\mathrm{d}x = \frac{x^f}{f}\cos(b\ln(x)) + \frac{b}{f}\int x^{f-1}\sin(b\ln(x))\mathrm{d}x$$

werden. Für die andere aber, für

$$P = \sin(b\ln(x)) \text{ und } \mathrm{d}Q = x^{f-1}\mathrm{d}x$$

genommen, wird

$$\int x^{f-1}\sin(b\ln(x))\mathrm{d}x = \frac{x^f}{f}\sin(b\ln(x)) - \frac{b}{f}\int x^{f-1}\cos(b\ln(x))\mathrm{d}x$$

sein. Daher berechnet man weiter durch Einsetzen

$$\int x^{f-1}\cos(b\ln(x))\mathrm{d}x = \frac{x^f}{ff+bb}(f\cos(b\ln(x)) + b\sin(b\ln(x)))$$

und

$$\int x^{f-1}\sin(b\ln(x))\mathrm{d}x = \frac{x^f}{ff+bb}(f\sin(b\ln(x)) - b\cos(b\ln(x))).$$

Aber es wird in der Tat, während der Nenner hinzukommt, nichts anderes darunter verstanden, als dass das Integral auf eine noch unbekannte Art besonders transzendeter Größen zurückfällt.